Индивидуальная практическая работа 2. Динамическое программирование.

Указания по выбору варианта

Выбор вариантов контрольного задания осуществляется студентом самостоятельно на основании двух последних цифр номера зачетной книжки (в каждом задании предусмотрено 20 вариантов).

Варианты

Задача (1-2) о распределении средств между предприятиями

Планируется деятельность n промышленных предприятий на очередной год. Начальные средства: s_0 . Размеры вложений в каждое предприятие кратны Δx . Средства x , выделенные предприятию i приносят в конце года прибыль $f_i(x)$, $i = 1,2. \dots n$.

Прибыль $f_i(x)$ не зависит от вложения средств в другие предприятия. Прибыль от каждого предприятия выражается в одних и тех же условных единицах; суммарная прибыль равна сумме прибылей от каждого предприятия.

Определить, какое количество средств нужно выделить каждому предприятию, чтобы суммарная прибыль была наибольшей.

Задача (3-4) об оптимальном распределении ресурсов между отраслями на n лет

Планируется деятельность производства на n лет. Начальные ресурсы: s_0 . Средства x , вложенные в отрасль 1 в начале года, дают в конце года прибыль $f_1(x)$ и возвращаются в размере $\varphi_1(x)< x$. Для отрасли 2 аналогично - $f_2(x)$ и $\varphi_2(x)< x$. В конце года все возвращенные средства заново перераспределяются между этими отраслями, новые средства не поступают, прибыль в производство не вкладывается.

Требуется распределить имеющиеся средства между двумя отраслями производства на лет так, чтобы суммарная прибыль от обеих отраслей за n лет была максимальной.

В задачах 1-2 найти оптимальное распределение средств между предприятиями при условии, что прибыль $f(x)$, полученная от каждого предприятия, является функцией от вложенных в него средств x, вложения кратны Δx , а функция $f(x)$ заданы таблично.

Задача 1

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f_1(x)$	5	9	12	14	15	18	20	24	27
$f_2(x)$	7	9	11	13	16	19	21	22	25
$f_3(x)$	6	10	13	15	16	18	21	22	25
$f_4(x)$	3	5	7	11	13	15	20	22	24

$s_0 = 9$, $\Delta x = 1$, $n= 4(3)$

Задача 2.

x	1	2	3	4	5				
$f_1(x)$	0,2	0,9	1,0	1,2	2,0				
$f_2(x)$	1,0	1,1	1,3	1.4	1,8				
$f_3(x)$	2,1	2,5	2,9	3,9	4,9				
$f_4(x)$	0	2,0	2,5	3,0	4,0				

$s_0 = 5$, $\Delta x = 1$, $n= 4$

В задачах 3-4 найти оптимальное распределение ресурсов s_0 между двумя отраслями производства в течение n лет, если даны функции доходов $f_1(x)$ $f_2(x)$ для каждой отрасли, функции возврата $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$. По истечении года только все возвращенные средства перераспределяются, доход в производство не вкладывается

Задача 3. $s_0= 40000$ *ед.*; $n= 4$; $f_1(x)=0.4\,x$; $f_2(x)=0.3\,x$; $\varphi_1(x)=0.5\,x$; $\varphi_2(x)=0.8\,x$

Задача 4. $s_0= 10000$ *ед.*; $n= 4$; $f_1(x)=0.4\,x^2$; $f_2(x)=0.5x$; $\varphi_1(x)=0.75\,x$; $\varphi_2(x)=0.3\,x$

Варианты индивидуального задания

номер варианта	Условия задания
2.1	Решить задачу 1

2.2	В условиях задачи 1 принять $s_0 = 8,\ n = 3,\ \Delta x = 2$
2.3	В условиях задачи 1 принять $s_0 = 8.\ n = 3$
2.4	Решить задачу 1 при $n = 4,\ \Delta x = 2$
2.5	В условиях задачи 1 принять $s_0 = 8$ и найти оптимальное распределение средств между 2-,3- и 4-м предприятиями
2.6	В условиях задачи 1 принять $s_0 = 9,\ n = 3,\ \Delta x = 3$
2.7	В условиях задачи 1 принять $s_0 = 9,\ n = 4,\ \Delta x = 3$
2.8	Решить задачу 2
2.9	В условиях задачи 2 принять $s_0 = 4$
2.10	В условиях задачи 2 принять $s_0 = 6,\ \Delta x = 2$
2.11	В условиях задачи 1 принять $s_0 = 10,\ \Delta x = 2$
2.12	Решить задачу 3
2.13	В условиях задачи 3 принять $s_0 = 20000$ *ед.*
2.14	В условиях задачи 3 принять $s_0 = 30000$ *ед.*
2.15	Решить задачу 4
2.16	В условиях задачи 4 принять $s_0 = 20000$ *ед.*
2.17	В условиях задачи 4 принять $s_0 = 30000$ *ед.*
2.18	Решить задачу 3 при условии, что в начале каждого года дополнительно поступают средства с размерах $\Delta s = 10000$
2.19	Решить задачу 4 при условии, что в начале каждого года дополнительно поступают средства с размерах $\Delta s = 2000$
2.20	Решить задачу 1 при $n = 3$

Методические указания

Динамическое программирование (ДП) – метод оптимизации, приспособленный к операциям, в которых процесс принятия решения может быть разбит на этапы (шаги). Такие операции называются многошаговыми.

Показатель эффективности данной управляемой операции – целевая функция – зависит от начального состояния и управления $Z = F(\theta_0, X)$.

Целевая функция является аддитивной от показателей эффективности Z_n каждого шага $Z = \sum_{k=1}^{n} Z_k = \sum_{k=1}^{n} f_k(\theta_{k-1}, x_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ и управления состоянием $\theta_n = \varphi_k(\theta_{k-1}, x_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Задача пошаговой оптимизации (задача ДП) формулируется так: определить такое допустимое управление $X\ (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, переводящее систему S из состояния θ_0 в состояние $\hat{\theta}$, при котором целевая функция Z принимает наибольшее (наименьшее) значение.

Вычислительная схема ДП связана с принципом оптимальности Беллмана и использует рекуррентные соотношения.

$$Z_k^*(\theta_{k-1}) = \max_{\{X_k\}} \{f_k(\theta_{k-1}, X_k) + Z_{k+1}^*(\theta_k)\},\ k=1,2,\ldots,n-1. \qquad (2.1)$$

Согласно принципу оптимальности, X_k выбирается из условия максимума этой суммы.

В результате условной оптимизации получаются две последовательности:

– $Z_n^*(\theta_{n-1}),\ Z_{n-1}^*(\theta_{n-2}), \ldots, Z_2^*(\theta_1),\ Z_1^*(\theta_0)$ – условные максимумы целевой функции на последнем, на двух последних,…, на n шагах;

– $X_n^*(\theta_{n-1}),\ X_{n-1}^*(\theta_{n-2}), \ldots, X_2^*(\theta_1),\ X_1^*(\theta_0)$ – условные оптимальные управления на n–м, ($n-1$) –м,…,1–м шагах.

2.1. Задача о распределении средств между предприятиями

Планируется деятельность четырех промышленных предприятий на очередной год. Начальные средства: $\theta_0 = 5$ у.е. Размеры вложения в каждое предприятие кратны 1 у.е. Средства x, выделенные k–му предприятию (k

= 1, 2, 3, 4), приносят в конце года прибыль $f_k(x)$. Функции $f_k(x)$ заданы таблично.

Таблица 2.1

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	8	6	3	4
2	10	9	4	6
3	11	11	7	8
4	12	13	11	13
5	18	15	18	16

Будем считать, что:
- прибыль $f_n(x)$ не зависит от вложений средств в другие предприятия;
- прибыль от каждого предприятия выражается в одних и тех же условных единицах;
- суммарная прибыль равна сумме прибылей, полученных от каждого предприятия.

Определить, какое количество средств нужно выделить каждому предприятию, чтобы суммарная прибыль была наибольшей.

Решение. Обозначим через x_k количество средств, выделенных k–му предприятию. Суммарная прибыль равна

$$Z=\sum_{k=1}^{4} f_k(x_k). \qquad (2.2)$$

Переменные x_k удовлетворяют ограничениям

$$\sum_{k=1}^{4} x_k = 5,\ x_k \geq 0,\ k = 1, 2, 3, 4. \qquad (2.3)$$

Требуется найти переменные x_1, x_2,, x_3,, x_4, удовлетворяющие (6.3) и обращающие в максимум функцию (6.2).

Схема решения задачи ДП: процесс решения распределения средств $\theta_0 = 5$ можно рассматривать как четырехшаговый, номер шага совпадает с номером предприятия; выбор переменных x_1, x_2, x_3, x_4 – управление соответственно на 1, 2, 3 и 4 шагах; $\hat{\theta}$ — конечное состояние процесса распределения – равно 0, т.к. все средства должны быть вложены. Схема распределения показана на рис. 6.1.

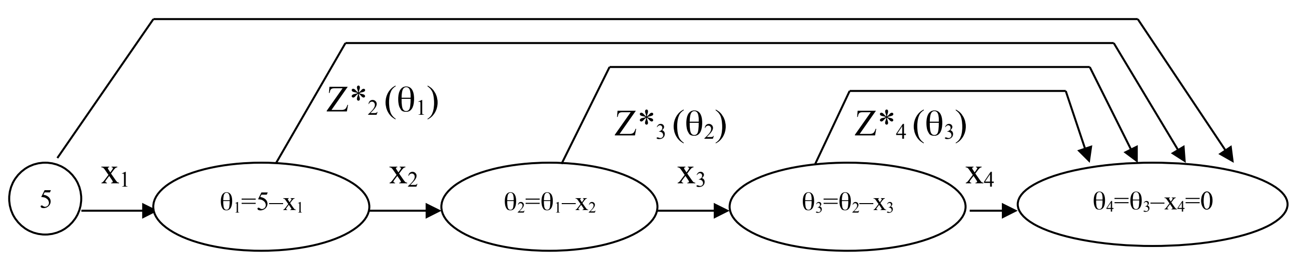

Рис. 2.1

Уравнения состояний в данной задаче имеют вид $\theta_k = \theta_{k-1} - x_k$, k=1, 2, 3, 4, где θ_k – параметр состояния – количество средств, оставшихся после k–го шага, т.е. средства, которые остается распределить между оставшимися $4–k$ предприятиями.

$Z_k^*(\theta_{k-1})$ – условная оптимальная прибыть, полученная от k–го, $(k+1)$–го, …, 4 предприятий, если между ними оптимальным образом распределялись средства θ_{k-1}. Допустимые управления на k–м шаге удовлетворяют условию $0 \leq x_k \leq \theta_{k-1}$.

Уравнения Беллмана имеют вид:

$$\kappa = 4,\ \ \theta_4=0 \Rightarrow Z_4^*(\theta_3)=\max f_4(x_4),\ 0 \leq x_4 \leq \theta_3;$$

$$Z_3^*(\theta_2)=\max \{f_3(x_3) + Z_4^*(\theta_3)\},\ \ 0 \leq x_3 \leq \theta_2;$$

$$Z_2^*(\theta_1)=\max \{f_2(x_2) + Z_3^*(\theta_2)\},\ \ 0 \leq x_2 \leq \theta_1;$$

$$Z_1^*(5)=\max \{f_1(x_1) + Z_2^*(\theta_1)\},\ \ 0 \leq x_3 \leq 5.$$

4 шаг (k = 4). В табл. 2.1 $f_4(x)$ прибыли монотонно возрастают, поэтому все средства, оставшиеся к IV шагу, следует вложить в 4–е предприятие. Для возможных значений θ_3 = 0, 1, 2, 3, 4, 5 получим $Z_4^*(\theta_3)=f_4(\theta_3)$ *и* $x_4^*(\theta_3)=\theta_3$.

Таблица 2.2

θ_{k-1}	x_k	θ_k	k=3			k=2			k=1		
			$f_3(x_3)+Z_4^*(\theta_3)$	$Z_3^*(\theta_2)$	$x_3^*(\theta_2)$	$f_2(x_2)+Z_3^*(\theta_2)$	$Z_2^*(\theta_1)$	$x_2^*(\theta_1)$	$f_1(x_1)+Z_2^*(\theta_1)$	$Z_1^*(\theta_0)$	$x_1^*(\theta_0)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0+4=4	4	0	0+4=4			0+6=6		
	1	0	3+0=3			6+0=6	6	1	8+0=8	8	1
2	0	2	0+6=6			0+7=7			0+10=10		
	1	1	3+4=7	7	1	6+4=10	10	1	8+6=14	14	1
	2	0	4+0=4			9+0=9			10+0=10		
3	0	3	0+8=8			0+9=9			0+13=13		
	1	2	3+6=9	9	1	6+7=13	13	1	8+10=18	18	1
	2	1	4+4=8			9+4=13		2	10+6=16		
	3	0	7+0=7			11+0=11			11+0=11		
4	0	4	0+13=13	13	0	0+13=13			0+16=16		
	1	3	3+8=12			6+9=15			8+13=21	21	1
	2	2	4+6=10			9+7=16	16	2	10+10=20		
	3	1	7+4=11			11+4=15			11+6=17		
	4	0	11+0=11			13+0=13			12+0=12		
5	0	5	0+16=16			0+18=18			0+19=19		
	1	4	3+13=16			6+13=19	19	1	8+16=24	24	1
	2	3	4+8=12			9+9=18			10+13=23		
	3	2	7+6=13			11+7=18			11+10=21		
	4	1	11+4=16			13+4=17			12+6=18		
	5	0	18+0=18	18	5	15+0=15			18+0=18		

3 шаг (k = 3). Делаем все предположения относительно остатка средств θ_2 к 3 шагу, т.е. после выбора x_1 и x_2. θ_2 = 0, 1, 2, 3, 4, 5 (0 – все средства отданы 1 и 2–му предприятиям, 5 – 1–е и 2–е предприятия ничего не получили и т.д.) В зависимости от этого выбираем $0 \le x_3 \le \theta_2$, находим $\theta_3=\theta_2 - x_3$ и сравниваем для разных x_3 при фиксированном θ_2 значения суммы $f_3(x_3)+Z_4^*(\theta_3)$. Для каждого θ_2 наибольшее из этих значений есть $Z_3^*(\theta_2)$ – условная оптимальная прибыль, полученная при оптимальном распределении θ_2 между 3–м и 4–м предприятиями. Оптимизация приведена в табл. 6.2 при k = 3.

2 шаг. Условный оптимум приведен в той же таблице и для k = 2. Для всех возможных значений θ_2 значения $Z_2^*(\theta_1)$ и $X_2^*(\theta_1)$ находятся в столбцах 8 и 9 соответственно; первые слагаемые в столбце 7 – значения $f_2(x_2)$ взяты из табл. 6.2, а вторые слагаемые взяты из столбца 5 табл. 6.2 при $\theta_2=\theta_1 - x_2$.

1 шаг. Условный оптимум приведен и для k = 1 при θ_0 = 5.

Итак, максимум суммарной прибыли $Z_{max}=Z_1^*(5)=24$ у. е. при

$$x_1^*=x_1^*(5)=1 \rightarrow$$
$$\rightarrow \theta_1^*=5-1=4 \Rightarrow x_2^*=x_2^*(4)=2 \rightarrow$$
$$\rightarrow \theta_2^*=4-2=2 \Rightarrow x_3^*=x_3^*(2)=1 \rightarrow$$
$$\rightarrow \theta_3^*=2-1=1 \Rightarrow x_4^*=x_4^*(1)=\theta_3^*=1.$$

Выделение средств различным предприятиям:

1–му выделена 1 у. е.
2–му выделены 2 у. е.
3–му выделена 1 у. е.
4–му выделена 1 у. е.

Замечания.

Решение четырехмерной задачи на определение условного экстремума сведено фактически к решению четырех одномерных задач: на каждом шаге определялась одна переменная x.

Из разобранной задачи видно, что метод ДП безразличен к виду и способу задания функции: $f_k(x)$ были заданы таблично, поэтому $Z_k^*(\theta)$ и $X_k^*(\theta)$ принимали дискретные значения, представленные в таблице.

Достоинством метода является возможность анализа решения на чувствительность к изменению θ_0 и n. Проведенные расчеты можно использовать для изменившихся начального состояния θ_0 и числа шагов n. Например, пусть в задаче произошло уменьшение начальных средств на 1 у.е. Для $\theta_0 = 4$ достаточно в таблицу добавить расчеты при $k = 1$. Получаем в этом случае $Z_{max} = 21$ у.е. при распределении:

$x_1{*}=1 \rightarrow \theta_1{*}=4-1=3 \Rightarrow x_2{*}=1$, или $x_2{*}=2 \rightarrow$
$\theta_2{*}=3-1=2$, или $\theta_2{*}=3-2=1 \Rightarrow x_3{*}=1$, или $x_3{*}=0 \rightarrow$
$\theta_3{*}=2-1=1$, или $\theta_3{*}=1-0=1$, $\Rightarrow x_4{*}=1$.

В результате найдены два оптимальных решения: (1,1,1,1) и (1,2,0,1). Если начальные средства увеличились, например, на 1 у.е., $\theta_0 = 6$, а функции прибыли $f_k(x)$ остались прежними, то в таблицу достаточно добавить раздел для $\theta_0 = 6$ при $k = 3, 2, 1$; этот фрагмент расчетов помещен в табл. 2.3.

Таблица 2.3

6	0	6	0+0=0	22	5	0+22=22	24	1	0+24=24	27	1
	1	5	3+16=19			6+18=24			8+19=27		
	2	4	4+13=17			9+13=22			10+16=26		
	3	3	7+8=15			11+9=20			11+13=24		
	4	2	11+6=17			13+7=20			12+10=22		
	5	1	18+4=22			15+4=19			18+6=24		

Получаем $Z_{max}=27$ у.е. при распределении:

$$x_1{*}=1 \rightarrow \theta_1{*}=6-1=5 \Rightarrow x_2{*}=1 \rightarrow \theta_2{*}=5-1=4 \Rightarrow x_3{*}=0 \rightarrow \theta_3{*}=4-0=4 \Rightarrow x_4{*}=4.$$

Оптимальное решение (1,1,0,4).

Если принято решение распределить средства $\theta_0 = 5$ между 2–, 3– и 4–м предприятиями, то задача уже решена. В разделе $k = 2$ табл. 6.2 находим $Z_{max}=Z_2{*}(5)=19$ при условии, что $x_2{*}=1,\ x_3{*}=0,\ x_4{*}=4$.

Наконец, если увеличилось количество предприятий (число шагов), то схему можно дополнить, присоединяя шаги с номерами $k = 0, -1, \ldots$ и т.д. Например, пусть средства в размере 6 у.е. распределяются между пятью предприятиями. Функция прибыли для пятого предприятия задана формулой $f(x) = 3x+1$, если $x \neq 0$ и $f(0) = 0$. Присвоим 5–му предприятию номер $k = 0$, тогда $x_0 = 0$ – средства, выделенные этому предприятию. Обозначим через $Z_0{*}(6)$ оптимальную прибыль, полученную от пяти предприятий:

$$Z_0{*}(6)= Z_3{*}(\theta_2)=\max\{f_0(x_0) + Z_1{*}(\theta_1)\},\ \ 0 \le x_0 \le 6,$$

а $\theta_1= 6 - x_0$. Условная оптимизация 0–го шага дана в табл. 2.4.

Таблица 2.4

x_0	0	1	2	3	4	5	6
$\theta_1= 6 - x_0$	6	5	4	3	2	1	0
$f(0) = 0$	0	4	7	10	13	16	19
$Z_1{*}(\theta_1)$(при $k=1$)	27	24	21	18	14	8	0
$f(x_0) + Z_1(\theta_1)$	27	28	28	28	27	24	19

Следовательно, $Z_{max}=28$, а оптимальных решений четыре: (1,1,2,1,1), (2,1,1,1,1), (2,1,2,0,1), (3,1,1,0,1). ▼

2.2. Задача об оптимальном распределении ресурсов между отраслями на n лет

Планируется деятельность двух отраслей производства на n лет. Начальные ресурсы θ_0. Средства x, вложенные в 1–ю отрасль в начале года, дают в конце года прибыль $f_1(x)$ и возвращаются в размере $q_1(x)<x$; аналогично для 2–й отрасли функция прибыли равна $f_2(x)$, а возврата — $q_2(x)$ $(q_2(x)<x)$. В конце года все возвращенные средства заново перераспределяются между 1 и 2 отраслями, новые средства не поступают, прибыль в производство не вкладывается.

Требуется распределить имеющиеся средства θ_0 между двумя отраслями производства на n лет так, чтобы суммарная прибыль от обеих отраслей за n лет оказалась максимальной.

Необходимо:

1) построить модель ДП для задачи и вычислительную схему;

2) решить задачу при условии, что $\theta_0 = 10000$ у.е., $n = 4$, $f_1(x) = 0{,}6x$, $q_1(x) = 0{,}7x$, $f_2(x) = 0{,}5x$, $q_2(x) = 0{,}8x$.

Решение. Процесс распределения средств между двумя отраслями производства разворачивается во времени, решения принимаются в начале каждого года, следовательно, осуществляется деление на шаги: номер шага – номер года. Управляемая система – две отрасли производства, а управление состоит в выделении средств каждой отрасли в очередном году. Параметры состояния к началу k–го года — θ_{k-1} (k = 1,…,n) – количество средств, подлежащих распределению. Переменных управления на каждом шаге две: x_k — количество средств, выделенных 1 отрасли, и y_k — 2 отрасли. Но так как все средства θ_{k-1} распределяются, то $y_k = \theta_{k-1} - x_k$, и поэтому управление на k–м шаге зависит от одной переменной x_n, т.е. $X_k(x_k, \theta_{k-1} - x_k)$.

Уравнения состояний выражают остаток средств, возвращенных в конце *k*–го года $\theta_k = q_1(x_k) + q_2(\theta_{k-1} - x_k)$.

Показатель эффективности *k*–го шага — прибыль, полученная в конце *k*–го года от обеих отраслей: $f_1(x_k) + f_2(\theta_{k-1} - x_k)$.

Суммарный показатель эффективности — целевая функция задачи — прибыль за *n* лет: $Z = \sum_{k=1}^{n} f_1(k) + f_2(\theta_{k-1} - x_k)$.

Пусть $Z^*_k(\theta_{k-1})$ — условная оптимальная прибыль за $n - k + 1$ лет, начиная с *k*–го года до *n*–го года включительно, при условии, что имеющиеся на начало *k*–го года средства θ_{k-1} в дальнейшем распределялись оптимально. Тогда оптимальная прибыль за *n* лет $Z_{max} = Z^*_1(\theta_0)$.

Уравнения Беллмана имеют вид:

$Z^*_n(\theta_{n-1}) = max\ \{f_1(x_n) + f_2(\theta_{n-1} - x_n)\},\ 0 \le x_n \le \theta_n - 1;$

$Z^*_k(\theta_{k-1}) = max\ \{f_1(x_k) + f_2(\theta_{k-1} - x_k) + Z^*_{k+1}(\theta_k)\}\ ,\ 0 \le x_k \le \theta_k - 1,$

$(k = n-1, n-2, \ldots, 2).$

Используем конкретные данные.

Уравнение состояний примет вид

$$\theta_k = 0{,}7x_k + 0{,}8(\theta_{k-1} - x_k) \text{ или } \theta_k = 0{,}8\theta_{k-1} - 0{,}1x_k.$$

Целевая функция *k*–го шага $0{,}6x_k + 0{,}5(\theta_{k-1} - x_k) = 0{,}1x_k + 0{,}5\theta_{k-1}$.

Целевая функция задачи $Z = \sum_{k=1}^{4} 0{,}5\theta_{k-1} + 0{,}1x_k$.

$Z^*_4(\theta_3) = max\ \{0{,}5\theta_3 + 0{,}1x_4\}\ 0 \le x_4 \le \theta_3;$

$Z^*_k(\theta_{k-1}) = max\ \{0{,}1x_k + 0{,}5\theta_{k-1} + Z^*_{k+1}(\theta_k)\},\ 0 \le x_k \le \theta_k - 1.$

Проводим условную оптимизацию.

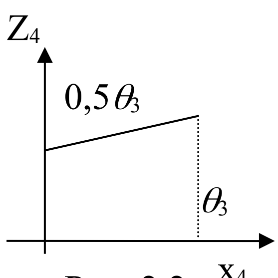

Рис. 2.2

4 шаг. Используем уравнение $Z^*_4(\theta_3) = max\ \{0{,}5\theta_3 + 0{,}1x_4\}$, $0 \le x_4 \le \theta_3$. Обозначим $Z_4 = 0{,}1x_4 + 0{,}5\theta_3$; Z_4 линейная, возрастающая, так как угловой коэффициент 0,1 больше нуля. Поэтому максимум достигается на конце интервала $[0;\theta_3]$. Следовательно, $Z^*_4(\theta_3) = 0{,}6\theta_3$ *при* $x^*_4(\theta_3) = \theta_3$.

3 шаг. Уравнение $Z^*_3(\theta_2) = max\ \{0{,}1x_3 + 0{,}5\theta_2 + 0{,}6\theta_3\},\ 0 \le x_3 \le \theta_2$.

Найдем θ_3 из уравнений состояний: $\theta_3 = 0{,}8\theta_2 - 0{,}1x_3$ и, подставив его выражение в правую часть уравнения, получим

$Z^*_3(\theta_2) = max\ \{0{,}1x_3 + 0{,}5\theta_2 + 0{,}6(0{,}8\theta_2 - 0{,}1x_3)\} = max\ \{0{,}04x_3 + 0{,}98\theta_2\},\quad 0 \le x_3 \le \theta_2.$

Как и в предыдущем случае, максимум достигается при $x_3 = \theta_2$; т.е. $Z^*_3(\theta_2) = 1{,}02\theta_2$ при $x^*_3(\theta_2) = \theta_2$.

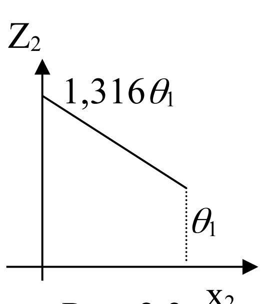

Рис. 2.3

2 шаг. Из уравнения состояния: $\theta_2 = 0{,}8\theta_1 - 0{,}1x_2$. Уравнение при $k=2$ примет вид $Z^*_2(\theta_1) = max\ \{1{,}316\theta_1 - 0{,}002x_2\},\ 0 \le x_2 \le \theta_1$. Линейная функция $Z^*_2 = 1{,}316\theta_1 - 0{,}002x_2$ относительно x_2 убывает на отрезке $[0;\theta_1]$, и поэтому ее максимум достигается при $x_2=0$: $Z^*_2(\theta_1) = 1{,}316\theta_1$ при $x^*_2(\theta_1) = 0$.

1 шаг. $\theta_1 = 0{,}8\theta_1 - 0{,}1x_1$. Уравнение при $k=1$ имеет вид

$Z^*_1(\theta_0) = max\ \{1{,}5528\theta_0 - 0{,}031x_1\},\ 0 \le x_1 \le \theta_0.$

Как и в предыдущем случае, максимум достигается в начале отрезка, т.е.

$Z^*_1(\theta_0) = 1{,}5528\theta_0$ при $x^*_1(\theta_0) = 0$.

На этом условная оптимизация заканчивается. Используя ее результат и исходные данные, получим $Z_{max} = Z^*_1(10000)$, $Z_{max} = 15528$.

$$x^*_1 = 0,\ y^*_1 = \theta_0 = 10000 \rightarrow$$
$$\theta^*_1 = 0{,}8*10000 - 0{,}1*0 = 8000 \Rightarrow x^*_2 = 0,\ y^*_2 = 8000 \rightarrow$$
$$\theta^*_2 = 0{,}8*8000 - 0{,}1*0 = 6400 \Rightarrow x^*_3 = 6400,\ y^*_3 = 0 \rightarrow$$
$$\theta^*_3 = 0{,}8*6400 - 0{,}1*6400 = 4480 \Rightarrow x^*_4 = 4480,\ y^*_4 = 0.$$

Оптимальная прибыль за 4 года, полученная от двух отраслей производства при начальных средствах 10000 у.е., равна 15528 у.е. при условии, что 1 отрасль получает по годам (0;0;6400;4480), а 2 отрасль – соответственно (10000;8000;0;0).